数理解析研究所講究録
第694巻 1989年 1-19

戸田格子とD加群について

数理解析研究所　高崎金久 (TAKASAKI, Kanehisa)

短期共同研究の前後に池田薫，武部尚志の両氏と戸田格子について議論したことがきっかけで戸田格子とD加群との関係を本格的に考え始めた．以下にその概要を紹介する．もっときちんとした話はそのうち論文にまとめる予定である．

1．KP hierarchy とD加群

もともとこの話はKP hierarchy とD加群を結び付けるという佐藤幹夫先生のアイディアに沿うものであるので，その場合のことを少し復習しておく．但し以下の話は筆者流にかなり味付けしてある．[1)]

KP hierarchy はここでは $w = 1 + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + \cdots$ という擬微分作用素を使って

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W\partial^n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

という形に書ける発展方程式として理解する．ここで B_n は例のごとく

$$B_n = \left(W\partial^n W^{-1}\right)_+, \qquad (\cdots)_+ \text{ は擬微分作用素の微分作用素部分} \tag{2}$$

である．

2

議論を抽象的に定式化するために微分代数の言葉を使う．基礎体は簡単のため$\mathbb{C}$であるとして（実際は標数0の可換体ならば何でもよい）加算個の生成系 w_n $(n=1,2,\dots)$ をもつ微分多項式環

$$\mathcal{A}=\mathbb{C}[\partial^k w_n\ (n=1,2,\dots,\ k=0,1,\dots)] \tag{3}$$

を考える．微分 (derivation) ∂ の作用は勿論 Leipniz 公式を通じて $\mathcal{A}$ 全体に決まる． KP hierarchy は $\mathcal{A}$ 上にさらに $\partial_n=\frac{\partial}{\partial t_n}$ $(n=1,2,\dots)$ という微分を定義する．こうして KP hierarchy を ∂, ∂_n という微分をもつ微分代数 $\mathcal{A}$ の構造に翻訳することができる．以後の議論は全てこの微分代数の言葉を使って進める．

この微分代数からさらに $\mathcal{A}$ 係数の微分作用素および擬微分作用素の非可換環

$$\begin{aligned}\mathcal{D}&=\{P;\quad P=\sum_{n=0}^{m}p_n\partial^n,\ p_n\in\mathcal{A}\},\\ \mathcal{E}&=\{P;\quad P=\sum_{n=-\infty}^{m}p_n\partial^n,\ p_n\in\mathcal{A}\}.\end{aligned} \tag{4}$$

を作る．これらは一定階数以下の作用素のなす $\mathcal{A}$ 部分加群

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(m)}&=\{P=\sum p_n\partial^n\in\mathcal{D};\ p_n=0\ (n>m)\},\\ \mathcal{E}^{(m)}&=\{P=\sum p_n\partial^n\in\mathcal{E};\ p_n=0\ (n>m)\},\end{aligned}$$

によってフィルター付けされている．前述の $(\cdots)_+$ およびそれと対になる $(\cdots)_-$ は

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{E}&=&\mathcal{D}&\oplus&\mathcal{E}^{(-1)}\\ P&=&(P)_+&+&(P)_-\end{array} \tag{5}$$

という $\mathcal{A}$ 上の直和分解を与えるものである．

これからこの微分代数 $\mathcal{A}$ の新しい生成系を選んで（普通の言葉で言えば，従属変数の取り替え） KP hierarchy を書き変える．鍵は

$$\mathcal{M}=\mathcal{D}W,\qquad W=1+\sum_{n=1}^{\infty}w_n\partial^{-n}, \tag{6}$$

という $\mathcal{E}$ の左 $\mathcal{D}$ 部分加群にある．これは次のような構造をもつ．

命題. 1）$\mathcal{M}$ は左 $\mathcal{A}$ 加群として次のような生成系 を持つ．

$$\begin{aligned}\mathcal{M}&=\bigoplus_{i\ge 0}\mathcal{A}W_i,\\ W_i&=\partial^i-\sum_{j<0}w_{ij}\partial^j.\end{aligned} \tag{7}$$

2） W_i は W から次のように作られる.

$$W_i = \left(\partial^i \cdot W^{-1}\right)_+ \cdot W. \tag{8}$$

特に $w_n = -w_{0,-n}$ $(n \geq 1)$ である.
3） W_i は次のような関係式を満たす.

$$\partial \cdot W_i = W_{i+1} - w_{i,-1} W_0 \quad (i \geq 0). \tag{9}$$

4）次の $\mathcal{A}$ 加群としての直和分解がある.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & = & \mathcal{M} & \oplus & \mathcal{E}^{(-1)} \\ \partial^i & = & W_i & + & \sum_{j<0} w_{ij}\partial^j \end{array} \tag{10}$$

特に w_{ij} が $\mathcal{A}$ の新しい生成系を与えることがわかる.

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[w_{ij}\ (i \geq 0,\ j < 0)] \tag{11}$$

新しい生成系に対する微分 ∂ の作用は (9) を作用素の係数について展開すればわかる. その結果は

$$\partial w_{ij} = w_{i+1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,-1} w_{0,j} \tag{12}$$

となる. w_{ij} は代数的には独立だが, 微分演算を許せば (12) により $w_{0,-n}$ $(n \geq 1)$ の微分多項式として書ける. そして $W = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} w_{0,-n}\partial^{-n}$ と置けば前述の構成を再現することになる.

この $\mathcal{A}$ の新しい生成系に対して ∂_n の作用は次のようになる.

命題. ∂_n は w_{ij} に次のように作用する.

$$\partial_n w_{ij} = w_{i+n,j} - w_{i,j-n} - \sum_{k=-n}^{-1} w_{ik} w_{k+n,j} \quad (n \geq 1). \tag{13}$$

これが新しい生成系で KP hierarchy を書き下したものになっている. (3) のような生成系では ∂_n $(n = 1, 2, \ldots)$ の作用は非常に見にくい. それに比べて新しい基底では (13) のようにずっと簡単で統一的なものになる. しかも ∂ の作用 (12) も同じような形（実は ∂_1 と

同じ）をもつことに注意されたい．（ある意味でどちらも Riccati 方程式の拡張になっている．そのことが‘積分可能性’の鍵となる．）

微分のことを忘れると，この w_{ij} は Grassmann 多様体のある affine 開部分集合上の座標系と同一視できる．このことが KP hierarchy と Grassmann 多様体の関係の基礎にある．例えば ∂, ∂_n の作用は Grassmann 多様体への線型 Lie 代数の無限小作用に由来する．一般解の構造や方程式の対称性（変換群）も同様である．詳しくは [5, 6] 参照のこと．

2．戸田格子ｈｉｅｒａｒｃｈｙ

戸田格子に対する hierarchy（以下簡単に TL hierarchy と呼ぶ）は差分作用素またはそれと同等な無限行列によって定式化される．[2] ここでは無限行列を使って議論する．

KP hierarchy の W に該当するものとして

$$\mathbb{W} = \left(w^{(i)}_{i-j}\right)_{i,j\in\mathbf{Z}}, \tag{14a}$$

$$\mathbb{V} = \left(v^{(i)}_{j-i}\right)_{i,j\in\mathbf{Z}}, \tag{14b}$$

という２つの無限正方行列を考える．（[7] の記号では $W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$ だが，記号を簡単にするために改めた．）ここで $w^{(s)}_n$, $v^{(s)}_n$ $(s,n\in\mathbb{Z})$ は

$$w^{(s)}_n = 0\ (n<0),\quad w^{(s)}_0 = 1, \tag{15a}$$

$$v^{(s)}_n = 0\ (n<0),\quad v^{(s)}_0 = \text{可逆}, \tag{15b}$$

という条件を満たす未知函数である．（‘可逆’というよりは‘恒等的にゼロにはならない’という方が普通ではあるが，あとで微分代数の言葉に翻訳するときのことを考えて‘可逆’としておく．また，$w^{(s)}_n$, $v^{(s)}_n$ がスカラー値のかわりに一定サイズの行列に値をとるような TL hierarchy を考えることもできるが，そのときには $v^{(s)}_0$ が行列として可逆という条件になる．）添字を負から正の方へ並べると $\mathbb{W}$, $\mathbb{V}$ はそれぞれ下三角行列，上三角行列になる．

$$\mathbb{W} = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \cdots & i-2 & i-1 & i & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & 0 \\ \cdots & w^{(i-1)}_1 & 1 & & \\ \cdots & w^{(i)}_2 & w^{(i)}_1 & 1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
\mathbb{V} = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & v_0^{(i-1)} & v_1^{(i-1)} & v_2^{(i-1)} & \cdots \\
 & & v_0^{(i)} & v_1^{(i)} & \cdots \\
0 & & & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

KP hierarchy の B_n にあたるものとしては次のような行列を考える.

$$\mathbb{B}_{+n} = \left(\mathbb{W}\Lambda^n\mathbb{W}^{-1}\right)_+ \qquad (n \geq 1), \tag{16a}$$

$$\mathbb{B}_{-n} = \left(\mathbb{V}\Lambda^{-n}\mathbb{V}^{-1}\right)_- \qquad (n \geq 1), \tag{16b}$$

ここで Λ^n $(n \in \mathbb{Z})$ は例のごとく

$$\Lambda^n = (\delta_{i+n,\, j})_{i,j\in\mathbf{Z}} \tag{17}$$

という shift 行列（実はこれが格子上の shift に対応している）であり，また $(\cdots)_+$ は無限正方行列から主対角線を含む上三角部分を残してあとの部分を 0 で埋める操作，$(\cdots)_-$ は今度は主対角線も 0 にして下三角部分のみを元のままに残す操作である．つまり任意の正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbf{Z}}$ に対して

$$(A)_+ = \Big(\theta(i \leq j)a_{ij}\Big), \tag{18a}$$

$$(A)_- = \Big(\theta(i > j)a_{ij}\Big). \tag{18b}$$

$\theta(\cdots)$ は Boole 函数 — つまり $\cdots$ の部分の命題が真ならば 1，偽ならば 0 の値をとる．

以上の記号を使うと TL hierarchy は次の発展方程式の形に書ける．

$$\partial_{+n}\mathbb{W} = \mathbb{B}_{+n}\mathbb{W} - \mathbb{W}\Lambda^n, \tag{19a}$$

$$\partial_{+n}\mathbb{V} = \mathbb{B}_{+n}\mathbb{V}, \tag{19b}$$

$$\partial_{-n}\mathbb{W} = \mathbb{B}_{-n}\mathbb{W}, \tag{19c}$$

$$\partial_{-n}\mathbb{V} = \mathbb{B}_{-n}\mathbb{V} - \mathbb{V}\Lambda^{-n}, \tag{19d}$$

ここで $\partial_{\pm n} = \frac{\partial}{\partial t_{\pm n}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は 2 系列の時間変数 $t_{\pm n}$ についての微分．しかし微分代数の言葉に翻訳するときには，特にどの変数についての微分ということは言及せず，単に抽象的な 2 系列の微分 $\partial_{\pm n}$ が与えられるという風に理解する．

微分代数の言葉で言えば，可換代数

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}\left[w_n^{(s)},\, v_n^{(s)},\, v_0^{(s)-1}\ (n, s \in \mathbb{Z})\right] \tag{20}$$

の上に $\partial_{\pm n}$ という微分が (19) のように定義されている，と考える．$v_0^{(s)-1}$ を入れておくのは $\mathbb{B}_{-n}$ の定義式の中の $\mathbb{V}^{-1}$ が $v_0^{(s)-1}$ を含むからである．これによって最初に述べたような‘$v_0^{(s)}$ の可逆性’の要請が微分代数の構造に自動的に組み込まれる．

KP hierarchy と違って今度は ∂ のようなものが方程式にあらわな形では含まれていないので従属変数自体の生成する代数を考えればよい．しかし従属変数に対する微分の作用を (19) を展開して書き下してもあまり美しい式にはならない．（ただ $w_1^{(s)}$; $v_{0,1}^{(s)}$ に対して $\partial_{\pm 1}$ の作用を書いてみると割ときれいな形になる．それは本来の戸田格子と直接に関係する部分だからである．）またD加群との関係もすぐには見えてこない．この辺をどうすればよいかを次節で説明する．

3．戸田格子とD加群

この問題に対する答は部分的には [7, 8] の中に既にある．[7] で示されているように，TL hierarchy は実質的には２成分の KP hierarchy のなかに‘埋め込む’ことが出来る．[7] ではこのことをやや間接的な論法で説明したが，[8] では直接に解を構成することでもっと具体的にこの事情を見ることができた．２成分 KP hierarchy は KP hierarchy を 2×2 の行列型擬微分作用素に拡張したものなので，この対応を介してD加群の構造を引き出すことは原理的には可能である．そのようにして得られるD加群は $M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}$ の中に実現される．

しかしながらこのやり方はいくつかの点で不満足である．第一に，KP hierarchy の任意の解が TL hierarchy の解を与えるわけではなく，ある‘open condition’を満たすもののみが TL hierarchy に対応する．そのことを２行２列の擬微分作用素の言葉で説明しようとするとちょっと面倒なことになる．第二に，特に [7] で使った論法は super TL hierarchy [3] には多分使えない．第三に，[7, 8] のように個々の解に言及するのでなく，出来れば抽象的な微分代数の言葉で説明したい．そのほかにもいろいろと動機や思惑がある．

以下にこの様な点を改善することを試みる．まず $\mathcal{A}$ の上に新しい微分 ∂ を次のように定義する．

$$\partial \mathbb{W} = (\mathbb{B}_{+1} + \mathbb{B}_{-1})\, \mathbb{W} - \mathbb{W}\Lambda, \tag{21a}$$

$$\partial \mathbb{V} = (\mathbb{B}_{+1} + \mathbb{B}_{-1})\, \mathbb{V} - \mathbb{V}\Lambda^{-1}. \tag{21b}$$

これは少しもったいぶった言い回しで，単刀直入には $\partial = \partial_{+1} + \partial_{-1}$ である．この ∂ を使って KP hierarchy の場合と同様に $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ を作る．前述の2行2列の行列型擬微分作用素による記述でも基本的には同じ ∂ を使う．しかしこれから考えるのは $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ という2成分の vector による記述である．

この $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$（明らかに左 $\mathcal{D}$ 加群をなす）の中に次のようなものを作る．

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}\left(W^{(s)},\ V^{(s)}\right), \tag{22}$$

ここで $W^{(s)}$, $V^{(s)}$ は次のような擬微分作用素である．

$$W^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(s)} \partial^{s-n}, \tag{23a}$$

$$V^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^{(s)} \partial^{-s-1-n}. \tag{23b}$$

こうして $\mathcal{M}$ は $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ の左 $\mathcal{A}$ 部分加群として定義されるが，実は

命題. $\mathcal{M}$ は左 $\mathcal{D}$ 部分加群になる．さらに $\mathcal{D}$ 上では 次のように2個の要素で生成される．

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}\left(W^{(s)},\ V^{(s)}\right) + \mathcal{D}\left(W^{(s-1)},\ V^{(s-1)}\right). \tag{24}$$

ここで s は任意の整数である，

さらに (10) に対応する事実としては

命題. 各 $s \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{A}$ 加群として次の直和分解がある．

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{E} = \mathcal{M} \bigoplus \left(\mathcal{E}^{(s-1)} \oplus \mathcal{E}^{(-s-1)}\right). \tag{25}$$

$(\partial^i,\ 0)$ $(i \geq s)$ 並びに $(0,\ \partial^{-i-1})$ $(i \leq s-1)$ を上の直和分解に従って分解して，$\mathcal{M}$-成分を $(W_i^{(s)},\ V_i^{(s)})$ および $(\overline{W}_i^{(s)},\ \overline{V}_i^{(s)})$ とする．これらを

$$W_i^{(s)} = \partial^i - \sum_{j<s} w_{i,j}^{(s)} \partial^j, \tag{26a}$$

$$V_i^{(s)} = -\sum_{j<-s} v_{i,-j-1}^{(s)} \partial^j, \tag{26b}$$

$$\overline{W}_i^{(s)} = -\sum_{j<s} \overline{w}_{i,j}^{(s)} \partial^j, \tag{26c}$$

$$\overline{V}_i^{(s)} = \partial^{-i-1} - \sum_{j<-s} \overline{v}_{i,-j-1}^{(s)} \partial^j, \tag{26d}$$

というように書くと（添字の付け方などが込み入っていて申し訳ないが）丁度 KP hierarchy の場合の W_i に該当するものになる．これらに対して (8) にあたる公式は 2 行 2 列の擬微分作用素の逆を使えば作れるが，あまり便利なものでない．（もともと (8) も理論的なものであって具体的な計算には向かない．）

実は，今の場合 (26) の係数は $w_n^{(s)}$, $v_n^{(s)}$ から微分を経ないで代数的な操作だけで決まる．このことを説明するために，(26) の係数を並べて次のような無限長方行列を作る．但しこの行列の行は $\mathbb{Z}$ を，列は $\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}$ をそれぞれ添字集合としている．

$$\eta^{(s)} = \begin{array}{c} \\ {\scriptstyle i<s} \\ {\scriptstyle i\geq s} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {\scriptstyle j<s} & \quad{\scriptstyle j\geq s} & \quad{\scriptstyle j<s} & \quad{\scriptstyle j\geq s} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} -\overline{w}_{ij}^{(s)} & 0 & \delta_{ij} & -\overline{v}_{ij}^{(s)} \\ \hline -w_{ij}^{(s)} & \delta_{ij} & 0 & -v_{ij}^{(s)} \end{array}\right) \end{array} \tag{27}$$

このとき

命題．$\eta^{(s)}$ は $(\mathbb{W}, \mathbb{V})$ に左から可逆行列を掛けることによって得られる：

$$\eta^{(s)} = {h^{(s)}}^{-1}(\mathbb{W}, \mathbb{V}),$$

$$h^{(s)} = \begin{array}{c} \\ {\scriptstyle i<s} \\ {\scriptstyle i\geq s} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} {\scriptstyle j<s} & \quad{\scriptstyle j\geq s} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & v_{j-i}^{(i)} \\ \hline w_{i-j}^{(i)} & 0 \end{array}\right) \end{array} \tag{28}$$

$h^{(s)}$ のゼロでない 2 つのブロックはそれぞれ対角線に可逆元の並んだ三角行列であることに注意．従って逆行列は代数的操作で（従って $\mathcal{A}$ の枠内で）作れる．左から可逆行列を掛けることはD加群の言葉で言えば（$\mathcal{A}$ 上の）生成系の取り替えに当たる．（$(\mathbb{W}, \mathbb{V})$, $\eta^{(s)}$, $h^{(s)}$ の概型を次頁に示す．）

$\boxed{\text{行列 (VII, VI) の概型}}$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}\ddots & & & \\ * & 1 & & \\ * & * & 1 & \\ * & * & * & \ddots\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}* & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & *\end{matrix} & \begin{matrix}* & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & *\end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix}* & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & *\end{matrix} & \begin{matrix}\ddots & & & \\ * & 1 & & \\ * & * & 1 & \\ * & * & * & \ddots\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}* & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & *\end{matrix}
\end{array}\right)$$

$\boxed{\text{行列 } \eta^{(s)} \text{ の概型}}$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}* & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & *\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}\ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots\end{matrix} & \begin{matrix}* & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & *\end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix}* & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & *\end{matrix} & \begin{matrix}\ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}* & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & *\end{matrix}
\end{array}\right)$$

$\boxed{\text{行列 } h^{(s)} \text{ の概型}}$

$$\left(\begin{array}{c|c}
0 & \begin{matrix}* & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & *\end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix}\ddots & & & \\ * & 1 & & \\ * & * & 1 & \\ * & * & * & \ddots\end{matrix} & 0
\end{array}\right)$$

こうして得られた新しい変数を使って TL hierarchy の発展方程式を書き直すことができるが，それは次節に回す．

$\eta^{(s)}$ の行列要素は（微分こそ含まないが）もとの $W_n^{(s)}$, $v_n^{(s)}$ という変数で書くと非常に複雑なものである．こんなものを考える理由は，これらが TL hierarchy の背後にある Grassmann 多様体の上のいろいろな affine 座標の一部になっているという点にある．super KP hierarchy の場合を調べるとよく判るのだが，[4] こういう affine 座標を取り出すことが τ（タウ）函数の微分代数的意味を理解する為の重要な作業なのである．

もちろん TL hierarchy の場合は [7, 8] に見るように τ 函数の正体がよくわかっているから，こんな複雑なことをいまさらやる必要はないのだが，KP hierarchy や TL hierarchy の話がスッキリまとまるのは Grassmann 多様体が Plücker 座標という便利な‘斉次座標’をもつという事情によっている．そこでは Plücker 座標を使って方程式を書いたり表現論的な性質を調べたりすれば充分で（そしてそれは非常に美しい形に整理された），affine 座標のことなど殆ど考える必要は無かった．super の場合はそれに該当するものが無いらしい．それで多様体を affine 座標近傍の貼り合わせで理解するという一番原始的な形式をとるわけである．今やっていることはそのための準備運動である．

このように複雑な面もあるが，D加群自体は (24), (25) のようなかなり特徴ある構造をもっている．第一に，KP hierarchy（正確には1成分の）の場合と違って2個の要素から生成される．これは2成分の KP hierarchy を $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ のD部分加群で記述するときにも起こる事情である．もともと TL hierarchy では s を止めるごとに2成分 KP hierarchy が付随していると考えられるので当然そうあるべきである．第二に，KP hierarchy での (10) が $s \in \mathbb{Z}$ をわたる無限個の条件に置き換わっている．これは Grassmann 多様体上のどういう点が TL hierarchy の解に対応するのか（この節の冒頭に言及した‘open condition’）ということを説明している．

もともと (10) は，Grassmann 多様体を一定の線型空間の中の部分空間の全体として理解すると，部分空間が或る reference subspace に横断的に交わるという条件にあたる．そういう部分空間の集合は affine 空間と同型になる．Grassmann 多様体の affine 被覆として普通使うのはこれらであって，reference subspace をいろいろな方向に動かすことによって多様体全体を覆うことができる．この意味では (25) は複数個の reference subspaces に対して同時に横断性を要求するものである．（但し実際には無限個の条件なので‘open condition’といってよいのかわからない．少なくとも素朴な意味では‘Zariski open’ではない．）

(10) の各条件は s ごとに一つの affine 座標近傍を定めており，$\eta^{(s)}$ （のうちで 0 や δ_{ij} の並ぶブロック以外）の行列要素はこの affine 座標近傍の上の座標系になる．

4．続き（発展方程式の考察）

まず (23) で定義された擬微分作用素を使って発展方程式を書くと次のようになる．

命題. (22) は次の方程式に同値：

$$\left[\partial_{+n},\ W^{(i)}\right] = \sum_j \mathbb{B}_{+n,ij} W^{(j)} - W^{(i)}\partial^n, \tag{29a}$$

$$\left[\partial_{+n},\ V^{(i)}\right] = \sum_j \mathbb{B}_{+n,ij} V^{(j)}, \tag{29b}$$

$$\left[\partial_{-n},\ W^{(i)}\right] = \sum_j \mathbb{B}_{-n,ij} W^{(j)}, \tag{29c}$$

$$\left[\partial_{-n},\ V^{(i)}\right] = \sum_j \mathbb{B}_{-n,ij} V^{(j)} - V^{(i)}\partial^n, \tag{29d}$$

ここで $\mathbb{B}_{\pm n,ij}$ は $\mathbb{B}_{\pm n}$ の $(i,\ j)$ 成分である．

$\partial_{\pm n}$ との交換子が擬微分作用素の係数に $\partial_{\pm n}$ を作用させることに他ならないことに注意．普通は (1) の左辺のように書くのだが，$\partial_{\pm n} W^{(s)}$ では作用素の積と紛らわしいので上のようにした．この結果を

$$\left(\left[\partial_{+n},\ W^{(s)}\right] + W^{(s)}\partial^n,\ \left[\partial_{+n},\ V^{(s)}\right]\right) \in \mathcal{M}, \tag{30a}$$

$$\left(\left[\partial_{-n},\ W^{(s)}\right],\ \left[\partial_{-n},\ V^{(s)}\right] + V^{(s)}\partial^n\right) \in \mathcal{M}, \tag{30b}$$

と書いても同じことである．$\mathcal{M}$ は $\left(W^{(s)},\ V^{(s)}\right)$ 達で $\mathcal{A}$ 上生成されるから，(30) の左辺はそれらの 1 次結合であらわされ，その係数を $\mathbb{B}_{\pm n,ij}$ とおけば (29) を得る．(29), (30) は KP hierarchy に対する発展方程式の同様な表現（[1, 2, 3, 5, 6] 参照）を自然な形で拡張したものになっている．

次に $\eta^{(s)}$ の言葉で発展方程式を書いたらどうなるかを考える．これは $\mathcal{M}$ の別の生成系で (29), (30) を書いて見せることと同じである．TL hierarchy の発展方程式 (18) は行列 $(\mathbb{W},\ \mathbb{V})$ を使えば

$$\partial_{+n}(\mathbb{W},\ \mathbb{V}) = \mathbb{B}_{+n}(\mathbb{W},\ \mathbb{V}) - (\mathbb{W},\ \mathbb{V})\begin{pmatrix}\Lambda^n & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{31a}$$

$$\partial_{-n}(\mathbb{W},\ \mathbb{V}) = \mathbb{B}_{-n}(\mathbb{W},\ \mathbb{V}) - (\mathbb{W},\ \mathbb{V})\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Lambda^{-n}\end{pmatrix}, \tag{31b}$$

となる．これを $\eta^{(s)}$ に対する方程式に書き直すことを考える．これはこの種の方程式に対するいつもの論法（[5, 6] 参照）で処理できる．つまり，(28) からすぐに判るように，$\mathbb{B}_{\pm n}$ が変わる（ゲージ変換になる）ことを別にすれば $\eta^{(s)}$ も同じ形の方程式を満たすのである．このゲージ変換を具体的に実行して計算する必要はない．実際 $\eta^{(s)}$ の零行列または単位行列になっているブロックを方程式の両辺で見比べてやると，$\mathbb{B}_{\pm n}$ の代わりに現れる行列がただちに読み取れる．— こうして次の結果を得る．

命題. $\eta^{(s)}$ に対する次の方程式は (18) と同値である．

$$\partial_{+n}\eta^{(s)} = \mathbb{B}^{(s)}_{+n}\eta^{(s)} - \eta^{(s)}\begin{pmatrix} \Lambda^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{32a}$$

$$\partial_{-n}\eta^{(s)} = \mathbb{B}^{(s)}_{-n}\eta^{(s)} - \eta^{(s)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda^{-n} \end{pmatrix}, \tag{32b}$$

ここで

$$\mathbb{B}^{(s)}_{+n} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} j<s & s\le j<s+n & j\ge s+n \end{array} \\ \begin{array}{c} i<s \\ i\ge s \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -\overline{w}^{(s)}_{i,j-n} & 0 \\ \hline 0 & -w^{(s)}_{i,j-n} & \delta_{i,j-n} \end{array}\right) \end{array} \tag{33a}$$

$$\mathbb{B}^{(s)}_{-n} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} j<s-n & s-n\le j<s & j\ge s \end{array} \\ \begin{array}{c} i<s \\ i\ge s \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c} \delta_{i,j+n} & -\overline{v}^{(s)}_{i,j+n} & 0 \\ \hline 0 & -v^{(s)}_{i,j+n} & 0 \end{array}\right) \end{array} \tag{33b}$$

∂ を定義する方程式 (20) も同様にして $\eta^{(s)}$ に移せる．この辺は演習問題として残しておく．

τ 函数との関連は次のようになる．

命題. $\mathcal{A}$ に対して新しい変数 $\log\tau(s)$（代数的に独立）を添加して

$$\widetilde{\mathcal{A}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{A}[\log\tau(s)\ (s\in\mathbb{Z})]$$

を作り，その上に ∂, $\partial_{\pm n}$ を次の式で拡張する．

$$\partial\log\tau(s) = w^{(s)}_{s,s-1} + \overline{v}^{(s)}_{s-1,s}, \tag{34a}$$

$$\partial_{+n} \log \tau(s) = \sum_{j=s-n}^{s-1} w^{(s)}_{j+n,j}. \tag{34b}$$

$$\partial_{-n} \log \tau(s) = \sum_{j=s}^{s+n-1} \overline{v}^{(s)}_{j-n,j}, \tag{34c}$$

$$\frac{\tau(s+1)}{\tau(s)} = v^{(s)}_0. \tag{34d}$$

このとき $\widetilde{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の微分代数としての拡大になる．（つまり $\widetilde{\mathcal{A}}$ の中で見ても $\mathcal{A}$ には新たな微分代数関係式は生じない．）

命題は微分代数の言葉で述べられているが，要するに方程式系 (34) が TL hierarchy の下で Frobenius の意味で積分可能ということを言っている．こうして τ 函数を特徴付ける方程式が得られる．

勿論そういう方程式は既に [7] の中で与えられている．ただ見かけは相当に異なり，[7] の方程式の方がはるかに簡明ではある．（本質的には同値．）しかし既に注意したように，[7] に示した形のものはそのままでは super TL hierarchy に拡張できるかどうか判らない．(34) については拡張できるのである．

5. super TL hierarchyへの拡張

TL hierarchy の super 化については既に池田氏の仕事があるが [9]，D加群との関わりで論じるには少し不都合な面があるので，ここではホンの少しだけ違った hierarchy を導入してそれをもっぱら議論する．（池田氏の hierarchy との関係はまだあまり深くは考えていない．）

hierarchy が $\mathbb{W} = \left(w^{(i)}_{i-j}\right)$, $\mathbb{V} = \left(v^{(i)}_{j-i}\right)$ $(i,j \in \mathbb{Z})$ という形の無限正方行列に対する発展方程式系として定義されることは前と同じである．$\mathbb{W}$ が下三角行列で主対角線が 1，$\mathbb{V}$ が上三角行列で主対角線が可逆なものよりなる，ということも同じ．ただし，今度は行列要素の代数的な性質が違っていて，$i-j$ の奇偶に応じて可換・反可換量であるとする．もう少し正確に言えば，偶同志および偶と奇の間では可換，奇同志は反可換とする．（[6, 9, 10] 参照．）こうしてこれらの生成する代数

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}\left[w^{(s)}_n,\ v^{(s)}_n,\ v^{(s)-1}_0\ (s,n \in \mathbb{Z})\right] \tag{35}$$

には $\mathbb{Z}_2$-grading ($\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0},\ \overline{1}\}$) が定まり，超可換代数になる．この grading の斉次元 $a \in \mathcal{A}$ に対して斉次次数 $\in \mathbb{Z}_2$ を parity と呼び，$p(a)$ と書く．従って特に

$$p\left(w_n^{(s)}\right) = \overline{n}, \quad p\left(v_n^{(s)}\right) = \overline{n}. \tag{36}$$

他方，微分としては次のように作用する $\overline{D}_{\pm n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を考える．

$$\overline{D}_{+n}\mathbb{W} = S^n \mathbb{B}_{+n}\mathbb{W} - S^n \mathbb{W}\Lambda^n, \tag{37a}$$

$$\overline{D}_{+n}\mathbb{V} = S^n \mathbb{B}_{+n}\mathbb{V}, \tag{37b}$$

$$\overline{D}_{-n}\mathbb{W} = S^n \mathbb{B}_{-n}\mathbb{W}, \tag{37c}$$

$$\overline{D}_{-n}\mathbb{V} = S^n \mathbb{B}_{-n}\mathbb{V} - S^n \mathbb{V}\Lambda^{-n}, \tag{37d}$$

ここで

$$S^n = \left((-)^{in}\delta_{ij}\right). \tag{38}$$

$$\mathbb{B}_{+n} = \left(\mathbb{W}\Lambda^n\mathbb{W}^{-1}\right)_+, \tag{39a}$$

$$\mathbb{B}_{-n} = \left(\mathbb{V}\Lambda^{-n}\mathbb{V}^{-1}\right)_-. \tag{39b}$$

さらにもう一つの微分 D を次のように定義する．

$$D\mathbb{W} = \mathbb{B}\mathbb{W} - S\mathbb{W}S\Lambda, \tag{40a}$$

$$D\mathbb{V} = \mathbb{B}\mathbb{V} - S\mathbb{V}S\Lambda^{-1}, \tag{40b}$$

ここに

$$\mathbb{B} = \left(S\mathbb{W}S\Lambda\mathbb{W}^{-1}\right)_+ + \left(S\mathbb{V}S\Lambda^{-1}\mathbb{V}^{-1}\right)_-. \tag{41}$$

n の奇遇に応じて $\overline{D}_{\pm n}$ は $\mathbb{Z}_2$-grading を $\overline{n}$ だけずらす．また D は $\mathbb{Z}_2$-grading を $\overline{1}$ だけずらす．その意味でやはり parity を $p\left(\overline{D}_{\pm n}\right) = \overline{n}$, $p(D) = \overline{1}$ と決めておく．これらは次の交換関係を満たす．

$$\left[\overline{D}_{\pm n},\ \overline{D}_{\pm m}\right\} = \left((-)^{nm} - 1\right)\overline{D}_{\pm(n+m)}, \tag{42a}$$

$$\left[\overline{D}_{+n},\ \overline{D}_{-m}\right\} = 0, \tag{42b}$$

$$\left[\overline{D}_{\pm n},\ D\right\} = 0. \tag{42c}$$

但し $[\,,\,\}$ は超交換子である．つまり奇偶（parity）の決まっている２個の要素に対して

$$[A,\ B\} \overset{\mathrm{def}}{=} [A,\ B]_{-(-)^{p(A)p(B)}} = AB - (-)^{p(A)p(B)}BA.$$

こうして超可換代数 $\mathcal{A}$ に $\overline{D}_{\pm n}$, D という微分をもつ微分代数の構造が入る．これが表現する微分方程式系を我々の super TL hierarchy として採用する．

独立変数と従属変数を定めて方程式を書くという普通の設定に読みなおすには，例えば KP hierarchy にならって $\overline{D}_{\pm n}$, D を次のような微分で置き換えればよい．

$$\overline{D}_{\pm(2n-1)} = \frac{\partial}{\partial t_{\pm(2n-1)}} - \sum_{k\geq 1} t_{\pm(2k-1)} \frac{\partial}{\partial t_{\pm(2n+2k\underset{-2}{\wedge})}}, \tag{43a}$$

$$\overline{D}_{\pm(2n)} = \frac{\partial}{\partial t_{\pm(2n)}}, \tag{43b}$$

$$D = \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta\frac{\partial}{\partial x}. \tag{43c}$$

ここで $(t_{\pm n}\ (n=1,2,\ldots),\ x,\ \theta)$ は独立変数の超空間の座標で $t_{\pm(2n-1)}$ と θ が反可換座標（parity $=\overline{1}$），$t_{\pm 2n}$ と x が可換座標（parity $=\overline{0}$）である．或は，$(x,\ \theta)$ をあらわに導入しないで，D は前述のように抽象的な微分（(40) の定める $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ への $\mathbb{C}$- 線型写像）であると解釈してもよい．[9] との比較のためにはその方がよい．

ついでに $\overline{D}_{\pm n}$ に関する零曲率方程式 (Zakharov-Shabat 表示) を記しておくと

$$\begin{aligned} &S^n\overline{D}_{\pm n}\mathbb{B}_{\pm m} - (-)^{nm}S^m\overline{D}_{\pm m}\mathbb{B}_{\pm n} - [\mathbb{B}_{\pm \underset{n}{\cancel{m}}},\ \mathbb{B}_{\pm \underset{m}{\cancel{n}}}\} \\ &\quad = ((-)^{nm}-1)\,\mathbb{B}_{\pm(n+m)}, \end{aligned} \tag{44a}$$

$$\begin{aligned} &S^n\overline{D}_{+n}\mathbb{B}_{-m} - (-)^{nm}S^m\overline{D}_{-m}\mathbb{B}_{+n} - [\mathbb{B}_{+n},\ \mathbb{B}_{-m}\} \\ &\quad = 0, \end{aligned} \tag{44b}$$

となる．特に (44b) の $n=m=1$ から

$$S\overline{D}_{+1}\mathbb{B}_{-1} + S\overline{D}_{-1}\mathbb{B}_{+1} - [\mathbb{B}_{+1},\ \mathbb{B}_{-1}]_{+} = 0 \tag{45}$$

を得る．これは

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{+1,ii} &= (-)^i\overline{D}_{+1}u(i), \\ \mathbb{B}_{-1,i,i-1} &= \exp\bigl((u(i)-u(i-1)\bigr), \end{aligned} \tag{46}$$

というように新しい従属変数 $u(s)$ を定義すると

$$\overline{D}_{-1}\overline{D}_{+1}u(i)=\exp\bigl(u(s)-u(s-1)\bigr)+\exp\bigl(u(s+1)-u(s)\bigr) \tag{47}$$

となり，指数型の相互作用項をもつ非線型場の方程式になる．これはどういう訳か池田氏のTL hierarchy から得られるものと同じである．

池田氏の hierarchy との違いは一般解の構造を見比べるとはっきりする．ここではその詳細に立ち入る余裕はないが，[9] で‘Riemann-Hilbert 分解’によって解を作るときに使った 2 個の行列値指数函数が我々の hierarchy では $\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}t_{\pm n}S^n\Lambda^{\pm n}\right)$ に変わる，ということのみ言い添えておく．

我々の super TL hierarchy に対しては TL hierarchy について前節まで見て来たことが殆どそのままの形で成り立つ．違いは super 特有の嫌らしい符号因子があちこちに現れることである．しかし（計算はとにかく大変だが）符号因子は全て行列 S の挿入という形に美しくまとまる．これは super KP hierarchy の場合にも見られたことである [6, 10]．行列 S を使って計算を整理して行くというこのやり方は表面的な工夫ではなくてむしろ本質的なことなのだと思う．その意味では supertrace Str （τ 函数を議論するときに現れる）も実は

$$\mathrm{Str}(\cdots)=\mathrm{tr}(S\cdots)$$

と書いて‘S-trace’と読むべきらしい． [5)]

前節までの結果が super TL hierarchy に対してどのように拡張されるかを簡単に記しておく．D加群の構成と構造の記述に関する部分は ∂ の代わりに D を使うことを別にすれば殆ど同じである． $W^{(s)}$, $V^{(s)}$ という擬微分作用素の定義もなんら変わらない．それを使うと (29),(30) に該当する方程式はそれぞれ次のようになる．

$$\left[\overline{D}_{+n},\ W^{(i)}\right\}=(-)^{in}\sum_j\mathbb{B}_{+n,ij}W^{(j)}-(-)^{in}W^{(i)}D^n, \tag{48a}$$

$$\left[\overline{D}_{+n},\ V^{(i)}\right\}=(-)^{in}\sum_j\mathbb{B}_{+n,ij}V^{(j)}, \tag{48b}$$

$$\left[\overline{D}_{-n},\ W^{(i)}\right\}=(-)^{in}\sum_j\mathbb{B}_{-n,ij}W^{(j)}, \tag{48c}$$

$$\left[\overline{D}_{-n},\ V^{(i)}\right\}=(-)^{in}\sum_j\mathbb{B}_{-n,ij}V^{(j)}-(-)^{in}V^{(i)}D^n, \tag{48d}$$

$$\left(\left[\overline{D}_{+n},\ W^{(s)}\right\}+(-)^{sn}W^{(s)}D^n,\ \left[\overline{D}_{+n}.\ V^{(s)}\right\}\right)\in\mathcal{M}, \tag{49a}$$

$$\left(\left[\overline{D}_{-n},\ W^{(s)}\right\},\ \left[\overline{D}_{-n}.\ V^{(s)}\right\}+(-)^{sn}V^{(s)}D^n\right)\in\mathcal{M}. \tag{49b}$$

$\eta^{(s)}$ の方程式も，$\mathbb{B}^{(s)}_{\pm n}$ を前と同じ形の式で定義すれば，(32) に対応して

$$\overline{D}_{+n}\eta^{(s)} = S^n\mathbb{B}^{(s)}_{+n}\eta^{(s)} - S^n\eta^{(s)}\begin{pmatrix}\Lambda^n & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{50a}$$

$$\overline{D}_{-n}\eta^{(s)} = S^n\mathbb{B}^{(s)}_{-n}\eta^{(s)} - S^n\eta^{(s)}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Lambda^{-n}\end{pmatrix}, \tag{50b}$$

となる．D に関する方程式も同様で

(41)の $\mathbb{B}$ とは別物 (筆者)

$$D\eta^{(s)} = \mathbb{B}\eta^{(s)} - S\eta^{(s)}S\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & \Lambda^{-1}\end{pmatrix} \tag{51}$$

となる．$\log\tau$ の定義方程式は次のようになる．

$$D\log\tau(s) = (-)^{s-1}w^{(s)}_{s,s-1} + (-)^s\overline{v}^{(s)}_{s-1,s}, \tag{52a}$$

$$\overline{D}_{+n}\log\tau(s) = \sum_{j=s-n}^{s-1}(-)^{j+jn}w^{(s)}_{j+n,j}. \tag{52b}$$

$$\overline{D}_{-n}\log\tau(s) = \sum_{j=s}^{s+n-1}(-)^{j+jn}\overline{v}^{(s)}_{j-n,j}, \tag{52c}$$

$$\left(\frac{\tau(s+1)}{\tau(s)}\right)^{(-)^s} = v^{(s)}_0. \tag{52d}$$

最後に，戸田格子に対する筆者のかつての興味を再び呼び覚ましてくれた池田薫，武部尚志両氏，並びに最近この方面についていろいろと話相手をしてくれる宮嶋俊和氏に対して深く感謝します．

18

註および参考文献

1) (p.1) 文献としては佐藤先生自身の論文がまだ無く，いろいろな講義録や口伝の形で流布している．入手し易いものとしては

[1] 京大での連続講義 (1984-1986) （梅田享筆記）

[2] 東北大学での集中講義 (1986) （数理研講究録 668‘ D加群概説 II’ 所収）（近野俊明筆記）

[3] AMS Summer Institute ‘Theta Functions’ (Bowdoin College 1987) （数理研講究録 675‘ 代数解析学の展望 ’ に草稿が掲載されている）（高崎金久筆記）

[4] Lectures at John Hopkins University (1988) （塩田隆比呂筆記）

などがある． [1,2,4] には微分方程式（線型非線型を問わず）一般に対する代数解析的な考え方も紹介してある．また筆者の書いた解説記事

[5] Integrable systems as deformations of D-modules, preprint RIMS-601 （上記 AMS Summer Institute の報告集に掲載予定）

[6] Super KP, super Grassmannian, and super D-module （数理研研究集会‘ ソリトン理論における広田の方法 ’ 1988.11. の講究録に掲載予定）

の前半および数理研講究録 640‘ D加群と非線型可積分系 ’ 所収の各論文も参照されたい．

2) (p.4) 戸田格子 hierarchy についてはこの講究録に所収の武部論文とその引用文献を参照されたい．原論文は

[7] K. Ueno and K. Takasaki, Toda lattice hierarchy, in K. Okamoto (ed.), *Group Representations and Systems of Differential Equations*, Advanced Studies in Pure Mathematics vol. 4 (North-Holland 1984).

またおなじ論文集に収録されている筆者の論文

[8] K. Takasaki, Initial value problem for the Toda lattice hierarchy, ibid.

も参照されたい． ([8] は自分では割と気に入っている仕事なので，読む人が全然いないことに些かガックリきている．)

3) (p.6) super TL hierarchy については池田薫氏の仕事がある．

[9] K. Ikeda, Super Toda lattice hierarchy, Lett. Math. Phys. 14 (1987), 321-328.

4) (p.10) super KP hierarchy をここで展開しているような視点から扱うことについては [6] の後半およびその原論文

[10] K. Takasaki, Symmetries of the super KP hierarchy, Lett. Math. Phys. (to appear)

を参照. super KP hierarchy に関する'上野グループ'の仕事についてはこの講究録の池田論文やそこに引用されている文献等を参照のこと.

5) (p.16) 多少横道にそれるが，この式を見ていると ± 1 の代わりに1の一般の巾根の並ぶ trace （統計力学の可解模型に出てくる'Markov trace'を思わせる）が何らかの状況で登場して来てもおかしくないという気もする. 或は super (bose+fermi) の代わりに para 統計的な代数構造に従う系と言ってもよい. そういうものがどれほど意味をもつかは別として，微分代数の言葉を使う利点はそういう場合のこともなんら曖昧さを残すことなくスッキリと定式化できることにある.